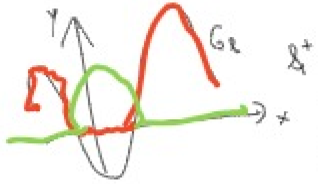


$f^+ =$ partie positive de f
$= \max\{f, 0\}$

$f^- = \min\{f, 0\}$
$= \max\{-f, 0\}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$
$f : \Omega \to \mathbb{R}$
$f \in \mathcal{L}^1 :\Leftrightarrow \int |f| \, d\mu < \infty$

$\int f \, d\mu$ exist $:\Leftrightarrow$
$\int f^+ \, d\mu < \infty$ ou $\int f^- \, d\mu < \infty$
$f = f^+ - f^-$ Dans ce cas
$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Exercice 1

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}[X]$.
2. Montrer que si X est à valeurs finies

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. Montrer que $X = \sum_{n} [illegible] \mathbf{1}_{X > n}$. En déduire que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

4. En déduire $\mathbb{E}[X]$ s'il existe $p \in]0, 1[$ tel que X soit une loi telle que

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

$\mathbb{E}[X]$ exist $:\Leftrightarrow \int X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$ exist

$X \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \int |X| \, d\mathbb{P}(\omega) < \infty$

1.) $\mathbb{E}[X]$ exist parce que $\int_\Omega X^-(\omega) \, d\mathbb{P} = 0 < \infty$

$X \in \mathbb{N} \Rightarrow X^- = 0$

2.) $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot k$

Soit X une variable aléatoire à valeur fini,
$\Rightarrow$ On trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que $X \in \{1, \dots, N\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{P}(X = j) =$$

$j > n$

Commutativité
$a + b = b + a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$
Associativité

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=0}^{j-1} \mathbb{P}(X = j)$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = j) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{j-1} 1}_{= j}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = j) \cdot j$$

Théorem

$$(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,m}$$

Démonstration:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}\cdot\mathbb{1}_m(k)\,d\mu_c(k)$$

$$= \int_{\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}\cdot\mathbb{1}_m(k)\,d\mu_c(k)\cdot\mathbb{1}_n(\ell)\,d\mu_c(\ell)$$

$$= \int_{\mathbb{N}}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{N}}\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{1}_m(k)\,d\mu_c(k)\,\mathbb{1}_n(\ell)\,d\mu_c(\ell)$$

$$\vdots$$

$a_n \to a$

$b_n \to b$

$a_n \cdot b_n \to a\cdot b$

$\lambda\cdot a_n \to \lambda\cdot a$

$a_n + b_n \to a+b$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.*
2. *Montrer que si X est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que $X = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{1}_{X>n}$. En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n).$$

4. *En déduire $\mathbb{E}(X)$ si il existe $p \in]0,1[$ tel que X suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

$$\mathbb{1}_{X=j}\underset{\in\Omega}{(\omega)} = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{X>n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\mathbb{1}_{X=j}$$

$j > n$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{j-1}\mathbb{1}_{X=j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{X=j}\underbrace{\sum_{n=0}^{j-1}1}_{=j} = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{X=j}\cdot j = X$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.*
2. *Montrer que si X est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de* $\mathbb{E}(X)$.
2. *Montrer que si* X *est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que* $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X>n}$. *En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

4. *En déduire* $\mathbb{E}(X)$ *si il existe* $p \in [0,1]$ *tel que* X *suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

3.)
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X>n}\right] = \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X>n}(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{X>n}(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>n) =$$

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème (*Théorème de convergence monotone*)

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite **croissante** de fonctions mesurables **positives** sur E. On a :

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty}\uparrow f_n \, d\mu.$$

b) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. On a :

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f \, d\mu.$$

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$$

$$\boxed{\int \sum_i a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu = \sum_i a_i \, \mu(A_i)}$$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. *Justifier brièvement l'existence de* $\mathbb{E}(X)$.
2. *Montrer que si* X *est à valeurs finies*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. *Montrer que* $X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X>n}$. *En déduire que*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

4. *En déduire* $\mathbb{E}(X)$ *si il existe* $p \in [0,1]$ *tel que* X *suit une loi telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1 euro ← pièce

p = prob pour une tête

X = Nombre de pile lancé jusqu'à la première tête

$$\mathbb{P}(X=1) = p$$
$$\mathbb{P}(X=2) = p\cdot(1-p)$$
$$\mathbb{P}(X=3) = p\cdot(1-p)^2$$
$$\mathbb{P}(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-\cancel{q^{N+1}}^{\,0}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{|q|<1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Série geometrique

$$\boxed{\mathbb{P}(X>k) = (1-p)^k}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Démonstration :

A_i = tête si on lance la pièce pour la i'ème fois

$$\mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = \mathbb{P}(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_n) =$$
$$= \mathbb{P}(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot (1-\mathbb{P}(A_n))$$
$$= (1-\mathbb{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1-p)$$
$$= (1-p) \cdot \ldots$$
$$= (1-p)^k$$

A, B
$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

Série geometrique

$= (1-p)^{\dots}$

$= (1-p)^k$

mesure

$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$

$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) =$

$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$

$= \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{\in \mathcal{A}})$

X mesurable

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et il suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*

   $$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) f(x)\, d\lambda(x).$$

   Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(x)$. En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*

   On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

À montrer :

X symétrique $\Leftrightarrow \mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$

"$\Rightarrow$" Soit $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$

À montrer : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mathbb{P}_{-X}(A) = \mathbb{P}_X(A)$.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{P}_{-X}(A) = \mathbb{P}(-X \in A) =$

$= \mathbb{P}(X \in -A)$

$= \mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$ ✓

"$\Leftarrow$" Soi $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$.

À montrer : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_{-X}(-A) = \mathbb{P}(-X \in -A) =$

$= \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A)$ ✓

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et il suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*

   $$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) f(x)\, d\lambda(x).$$

   Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(x)$. En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*

   On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$t \mapsto \mathbb{P}(X \le t)$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, t])$

Soit X symmétrique

$F_X(-t) = \mathbb{P}(X \le -t)$

$= \mathbb{P}_X(]-\infty, -t]) = \mathbb{P}_{-X}(]-\infty, -t])$

$= \mathbb{P}(-X \le -t)$

$= \mathbb{P}(X \ge t)$

$= \mathbb{P}(X = t) + \mathbb{P}(X > t)$

$= \mathbb{P}_X(\{t\}) + 1 - \mathbb{P}(X \le t)$

$= \mathbb{P}_X(\{t\}) + 1 - F_X(t)$

$= \mathbb{P}_X(\{t\}) + 1 -$

$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$= \mathbb{P}_X(\{t\}) + \ldots$

$= \mathbb{P}_X(\{t\}) + 1 - F_X(t)$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et il suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*
$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) f(x)\, d\lambda(x).$$
Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(x)$. En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a + x) = f(a - x)$. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*
On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

X symétrique $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$

"$\Rightarrow$" Soit X symétrique.

Soit $k \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{P}(-X = k) = \mathbb{P}_{-X}(\{k\}) = \mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$ ✓

"$\Leftarrow$" Soit $\forall k \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$

Disons $\mathbb{P}(X \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = 1$

À montrer : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}_X(A) \overset{!}{=} \mathbb{P}_{-X}(A)$.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{P}_{-X}(A) = \mathbb{P}(-X \in A) =$

$= \mathbb{P}(X \in -A) = \mathbb{P}(X \in -A \cap \{x_1, x_2, \ldots\})$

$= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} : \\ x_i \in -A}} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} : \\ x_i \in -A}} \mathbb{P}(-X = x_i)$

$= \mathbb{P}(-X \in -A \cap \{x_1, x_2, \ldots\})$

$= \mathbb{P}(-X \in -A)$

$= \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A)$ ✓

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $\left(\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \right)$

$\mathbb{P}_X$ n'est pas symétrique

$X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$

$Y := X - \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{P}\left(Y = -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et il suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de*

$Y := X - \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{P}(Y = -\frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$\qquad \mathbb{P}(Y = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et il suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*

$g(x) = f(-x)$

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x) d\lambda(x).$$

Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, [redacted]). En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}[X] = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$. Montrer que $Y := X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*

On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

densité

À montrer : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}_{-X}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot \overbrace{f(-x)}^{g(x)} \, d\lambda(x)$$

$$\mathbb{P}_{-X}(A) = \mathbb{P}(-X \in A) = \mathbb{P}(X \in -A) = \mathbb{P}_X(\overset{B}{\overset{\shortparallel}{-A}}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{-A}(x) \cdot f(x) \, d\lambda(x)$$

$-(-x) = x$

Théorème (*Théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^d$*)

Soit U, D des ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ mesurable, et $\varphi : U \to D$ un C^1-difféomorphisme.

a) Si f est positive, alors

$$\int_D f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(u))|J_\varphi(u)|\,du$$

et

$$\int_U f(\varphi(u))\,du = \int_D f(x)|J_{\varphi^{-1}}(x)|\,dx.$$

b) Si f est intégrable sur D, la première égalité précédente a un sens (autrement dit, $u \mapsto f(\varphi(u))|J_\varphi(u)|$ est intégrable sur U) et est vraie. Si $f \circ \varphi$ est intégrable sur U, alors il en est de même de la deuxième.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{1}_{-A}(x) = 1 \Leftrightarrow \\ x \in -A \Leftrightarrow \\ -x \in A \Leftrightarrow \\ \mathbb{1}_A(-x) = 1 \end{array}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(\overset{\varphi(x)}{-x}) \cdot f_X(x) \, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(-x) \cdot f_X(-(-x)) \cdot \overset{|\varphi'(x)|}{\overset{\shortparallel}{1}} \, d\lambda(x) =$$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme

$\quad x \mapsto -x$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot \underbrace{f_X(-x)}_{g(x) = f_{-X}(x)} \, d\lambda(x)$$

$|\varphi'(x)| = |-1| = 1$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = f(-x)$

$x^2 \cdot \exp(x^2)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : g(-x) = f$

À montrer :

X symétrique $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = f_X(-x)$

Première partie de l'exercice

"$\Rightarrow$" Soit X symétrique

$f_{-X}(x) = f_X(-x)$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_{-X}(A) = \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot \underbrace{f_X(x)}_{= f_{-X}(x)} \, d\lambda(x)$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f_X(-x) = f_X(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = b \wedge b = c \\ \Rightarrow a = c \\ \text{Transitivité} \end{array}}$$

"$\Leftarrow$" Soit $\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = f_X(-x)$.

À montrer : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_{-X}(A)$.

$$\mathbb{P}_{-X}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot \underbrace{f_{-X}(x)}_{= f_X(-x)} \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot f_X(-x) \, d\lambda(x) =$$

l'hypothèse

Prekmière partie de l'exercice

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda(x)$$

$\mathbb{P}_X(A)$

Prekmière partie de l'exercice

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda(x)$$

$$= \mathbb{P}_X(A) \checkmark$$

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X est une variable aléatoire symétrique (respectivement que la mesure $\mathbb{P}_X$ est symétrique) si pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_X(-A) = \mathbb{P}_X(A)$.

1. *Montrer que X est symétrique si et seulement $(-X)$ et X suivent la même loi. Dit autrement il faut et si suffit que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que on a alors $F_X(-t) = 1 - F_X(t) + \mathbb{P}_X(\{t\})$.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que X est symétrique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(-X = k)$. Donner un exemple de loi discrète symétrique et de loi discrète non symétrique.*
3. *Soit X une variable aléatoire intégrable possédant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui signifie par définition que pour tout ensemble A mesurable, on a*

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) f(x) \, d\lambda(x).$$

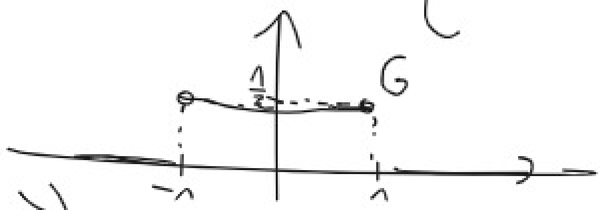
   Montrer que $-X$ possède la densité g par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(x)$. En déduire que X est symétrique si et seulement sa densité est paire (presque partout). Donner un exemple de loi continue symétrique et de loi continue non symétrique.
4. *On suppose que X est intégrable et symétrique. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire possédant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire symétrique.*

   On pourra utiliser la caractérisation de la densité à l'aide de fonctions continues bornées pour montrer que Y possède une densité.

$$X \sim \mathrm{Uniform}([\underbrace{-1}_{a}, \underbrace{1}_{b}])$$

$\mathbb{P}_X$ est symmetrique

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$X \sim \mathrm{Uniform}([-1, 2])$$

$\mathbb{P}_X$ n'est pas symmétrique